

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

**GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM BẰNG
MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT
PHẦN 1**

Ths. Phạm Ngọc Anh

Hà Nội, 1/2018

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

**GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM BẰNG
MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT
PHẦN 1**

Xác nhận của Bộ môn Toán

Hà Nội, 1/2018

MỤC LỤC

Chương 1.CƠ SỞ TOÁN HỌC	5
1.1.Giới hạn hàm số:.....	5
1.1.1.Định nghĩa giới hạn hàm số.....	5
1.1.2.Định nghĩa giới hạn một phía	5
1.1.3.Tính chất của giới hạn	5
1.1.4.Định nghĩa vô cùng bé	6
1.1.5.Định nghĩa so sánh các vô cùng bé.....	6
1.1.6.Định nghĩa vô cùng lớn.....	6
1.1.7.Định nghĩa so sánh các vô cùng lớn	6
1.2.Hàm số liên tục	7
1.2.1.Định nghĩa :	7
1.2.2.Định nghĩa :	7
1.2.3.Định lí 1.2.3	7
1.2.4.Định nghĩa hàm liên tục trên khoảng, đoạn.....	7
1.2.5.Định nghĩa điểm gián đoạn.....	7
1.2.6.Tính chất hàm số liên tục.	7
1.3.Đạo hàm của hàm số một biến	8
1.3.1.Đạo hàm tại một điểm	8
1.3.2.Đạo hàm một phía.....	8
1.3.3.Định lí.....	8
1.3.4.Đạo hàm của hàm hợp	9
1.3.5.Đạo hàm của hàm ngược	9
1.3.6.Đạo hàm cấp cao	9
1.3.7.Định lí.....	9
1.3.8.Định lý các hàm khả vi.....	9
1.3.9.Công thức Taylor, công thức Mac-Laurin	10
Chương 2.MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT	11
KẾT LUẬN	19
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	20

Chương 1. CƠ SỞ TOÁN HỌC

1.1. Giới hạn hàm số:

1.1.1. Định nghĩa giới hạn hàm số

- Hàm số f được gọi là có giới hạn l khi x dần đến a , ký hiệu là $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ thì $|f(x) - l| < \varepsilon$.
- Hàm số f được gọi là có giới hạn l khi x dần đến vô cùng, ký hiệu là $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$, nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : \forall |x| > A$ thì $|f(x) - l| < \varepsilon$.

1.1.2. Định nghĩa giới hạn một phía

Số l_1 được gọi là giới hạn trái của $f(x)$ tại a , kí hiệu là $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a^-) = l_1$ nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$$

- Số l_2 được gọi là giới hạn phải của $f(x)$ tại a , kí hiệu là $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+) = l_2$ nếu: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon$

1.1.3. Tính chất của giới hạn

- Tính duy nhất của giới hạn: Nếu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ thì l là duy nhất.
- Tính bị chặn: Nếu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ thì $f(x)$ bị chặn trong một lân cận của a .
- Nguyên lí kẹp: Cho ba hàm số f, g, h thỏa mãn: $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in X$, nếu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ thì $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$.
- Giới hạn của hàm hợp: Cho $f: X \rightarrow R, g: Y \rightarrow R$ và $f(X) \subset Y$. Giả sử $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ và $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = g(b)$ thì $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b)$.
- Giới hạn của hàm đơn điệu: Cho hàm $f: (a, b) \rightarrow R, (a, b \in R)$ và là hàm đơn điệu tăng. Nếu f bị chặn trên thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.
- Một số giới hạn đáng nhớ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

- Người ta chứng minh được rằng nếu f là hàm sơ cấp xác định tại a thì $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

1.1.4. Định nghĩa vô cùng bé

Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé (VCB) khi $x \rightarrow a$, nếu $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ (a có thể là ∞).

1.1.5. Định nghĩa so sánh các vô cùng bé

Cho $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là các VCB khi $x \rightarrow a$.

- Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$ thì ta nói rằng $\alpha(x)$ là VCB cấp cao hơn $\beta(x)$ khi $x \rightarrow a$, ký hiệu $\alpha = o(\beta)$.
- Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = c, c \neq 0$ hữu hạn thì ta nói rằng $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là các VCB ngang cấp khi $x \rightarrow a$.
- Đặc biệt nếu $c = 1$ thì ta nói rằng $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là các VCB tương đương khi $x \rightarrow a$. Ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

1.1.6. Định nghĩa vô cùng lớn

- Hàm số $A(x)$ được gọi là vô cùng lớn (VCL) khi $x \rightarrow a$ nếu $A(x) \rightarrow \infty$, khi $x \rightarrow a$, (a có thể là ∞).
- Hàm số $A(x)$ là VCL khi $x \rightarrow a$ khi và chỉ khi $\frac{1}{A(x)}$ là VCB khi $x \rightarrow a$.

1.1.7. Định nghĩa so sánh các vô cùng lớn

Cho $A(x)$, $B(x)$ là các VCL khi $x \rightarrow a$

- Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x)}{B(x)} = \infty$ thì ta nói $A(x)$ là VCL cấp cao hơn $B(x)$ khi $x \rightarrow a$.
- Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x)}{B(x)} = c \neq 0$ hữu hạn thì nói A,B là VCL ngang cấp khi $x \rightarrow a$.
- Đặc biệt $c = 1$ thì ta nói A,B là các VCL tương đương khi $x \rightarrow a$, kí hiệu $A(x) \sim B(x)$.

1.2. Hàm số liên tục

1.2.1. Định nghĩa hàm số liên tục : Giả sử X là một tập hợp số thực ($X \subset \mathbb{R}$) và $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

a. Hàm f được gọi là liên tục tại x_0 nếu:

i. $x_0 \in X$

ii. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $\forall x \in X$ thỏa mãn $|x - x_0| < \delta$, ta có:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

b. Hàm f gọi là liên tục trên X nếu f liên tục tại mọi điểm trên tập X .

c. Trường hợp f không liên tục tại $x_0 \in X$, ta nói f gián đoạn tại x_0 và x_0 là điểm gián đoạn của hàm số f

1.2.2. Định nghĩa : Giả sử X là một tập hợp số thực ($X \subset \mathbb{R}$) và $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Hàm số f được gọi là liên tục trái (phải) tại điểm x_0 nếu:

i. $x_0 \in X$

ii. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $\forall x \in X$ thỏa mãn $x_0 - \delta < x \leq x_0$

($x_0 \leq x < x_0 + \delta$), ta có: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

1.2.3. Định lí 1.2.3 Hàm số f liên tục tại điểm x_0 khi và chỉ khi f liên tục phải và liên tục trái tại x_0 .

1.2.4. Định nghĩa hàm liên tục trên khoảng, đoạn

- Hàm $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì ta nói nó liên tục trên (a, b) .
- Hàm $f(x)$ liên tục trên khoảng mở (a, b) và liên tục phải tại a , liên tục trái tại b thì ta nói nó liên tục trên $[a, b]$.

1.2.5. Định nghĩa điểm gián đoạn

- Nếu $f(x)$ không liên tục tại a thì ta nói $f(x)$ gián đoạn tại a .
- Nếu a là điểm gián đoạn và $f(a^-), f(a^+)$ là các số hữu hạn thì a được gọi là điểm gián đoạn loại một. Hiệu $f(a^+) - f(a^-)$ gọi là bước nhảy của $f(x)$ tại a .
- Nếu a là điểm gián đoạn và không phải là điểm gián đoạn loại 1, thì a được gọi là điểm gián đoạn loại 2.

1.2.6. Tính chất hàm số liên tục.

Cho $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó,

- Nếu $f(x)$ liên tục tại a thì $|f(x)|$ liên tục tại a .
- Nếu $f(x), g(x)$ liên tục tại a thì $f(x) + g(x)$ liên tục tại a .
- Nếu $f(x)$ liên tục tại a thì $\lambda f(x)$ liên tục tại a .
- Nếu $f(x), g(x)$ liên tục tại a thì $f(x)g(x)$ liên tục tại a .
- Nếu $f(x), g(x)$ liên tục tại a và $g(x) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại a .
- Nếu f liên tục tại a và g liên tục tại $f(a)$ thì $g \circ f$ liên tục tại a .
- Nếu f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì f đạt giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M trên $[a, b]$ và $R(f) = [m, M]$. Hơn nữa $\forall q \in [m, M]$ thì $\exists c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = q$.
- Nếu f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì $\exists c \in [a, b]$ để $f(c) = 0$.

1.3. Đạo hàm của hàm số một biến

1.3.1. Đạo hàm tại một điểm

Cho f là hàm xác định ở lân cận $V(x_0)$ của điểm x_0 . Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, thì giới hạn này được gọi là đạo hàm của hàm f tại điểm x_0 và

kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $\frac{df(x_0)}{dx}$, khi đó f được gọi là có đạo hàm tại điểm x_0 .

1.3.2. Đạo hàm một phía

Cho f là hàm xác định ở lân cận phải $V^+(x_0)$ của điểm x_0 . Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, thì giới hạn này được gọi là đạo hàm phải của hàm f tại điểm

x_0 và kí hiệu là $f'_+(x_0)$, khi đó f được gọi là có đạo hàm phải tại điểm x_0 .

Tương tự nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, thì giới hạn này được

gọi là đạo hàm trái của hàm f tại điểm x_0 và kí hiệu là $f'_-(x_0)$, khi đó f được gọi là có đạo hàm trái tại điểm x_0 .

1.3.3. Định lí. Cho hai hàm số f, g khả vi tại a . Khi đó:

- $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- với mọi $\lambda \in R$, có $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$,
- $[f \cdot g]'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- nếu $g(a) \neq 0$ thì $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

1.3.4. Đạo hàm của hàm hợp

Cho $a \in X$, $f : X \rightarrow R$, $g : Y \rightarrow R$ với $f(X) \subset Y$. Nếu f có đạo hàm tại a và g có đạo hàm tại $f(a)$ thì hàm hợp $g \circ f$ có đạo hàm tại a và $(g \circ f)'(a) = g'[f(a)] \cdot f'(a)$.

1.3.5. Đạo hàm của hàm ngược

Giả sử f là hàm xác định ở $V(x_0)$ và có hàm ngược g ở trên $V(x_0)$. Khi đó nếu tồn tại $f'(x_0) \neq 0$ thì hàm g có đạo hàm tại điểm $y_0 = f(x_0)$ và $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

1.3.6. Đạo hàm cấp cao

Cho $f : X \rightarrow R$ khả vi trên X .

- Nếu f' có đạo hàm tại a thì $(f'(a))'$ được gọi là đạo hàm cấp 2 của f tại a và kí hiệu là $f''(a)$. Một cách tổng quát, đạo hàm cấp n của f tại a , kí hiệu là $f^{(n)}(a)$, xác định bởi công thức $f^{(n)}(a) = [f^{(n+1)}]'(a)$.

1.3.7. Định lí. Cho $\lambda \in R, n \in N^*$, $f, g : X \rightarrow R$ khả vi n lần trên X . Khi đó

- $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$, $d^n(f + g) = d^n f + d^n g$,
- $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$, $d^n(\lambda f) = \lambda d^n f$,
- $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ (công thức Leibnitz), $d^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^n C_n^k (d^k f)(d^{n-k} g)$.

1.3.8. Định lý các hàm khả vi

1.3.8.1. Điểm cực trị của hàm số

Hàm số $f(x)$ được gọi là đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại a nếu tồn tại số $\varepsilon > 0$ sao cho $\forall x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ thì $f(x) - f(a) \leq 0$ (hoặc $f(x) - f(a) \geq 0$). Điểm cực đại và cực tiểu gọi chung là điểm cực trị.

1.3.8.2. Định lý Fermat

Nếu $f(x)$ khả vi tại a và đạt cực trị tại a thì $f'(a) = 0$.

1.3.8.3. Định lí Rolle

Cho $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b) và $f(a) = f(b)$. Khi đó, tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

1.3.8.4. Định lí Lagrange

Cho $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b) . Khi đó, tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

1.3.8.5. Định lí Cauchy

Cho hai hàm số $f, g:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b) . Ngoài ra $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$. Khi đó, tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

1.3.9. Công thức Taylor, công thức Mac-Laurin

Cho hàm số f khả vi đến cấp $(n+1)$ tại lân cận điểm x_0 .

- Gọi đa thức $P_n(x)$ với $\deg(P_n(x)) \leq n$ thỏa mãn $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \forall k = \overline{0, n}$ là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận điểm x_0 .

- Nếu $P_n(x)$ là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận x_0 thì nó là duy nhất và có dạng $P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

- Với mọi x thuộc lân cận của x_0 , ta có:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

trong đó c nằm giữa x và x_0

Công thức trên được gọi là công thức khai triển Taylor cấp n của hàm $f(x)$ ở lân cận x_0 .

Biểu thức $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ được gọi là phần dư thứ n của khai triển Taylor.

- Khi $x_0 = 0$ công thức Taylor trở thành

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Công thức trên được gọi là công thức khai triển Mc Laurin cấp n của hàm $f(x)$.

Chương 2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT

Loại 1. Phương pháp quy nạp

Ví dụ 1 Cho hàm số f xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và thoả mãn:
$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1, \forall x, y; \quad f(1) = 2$$

Hãy xác định $f(m), f\left(\frac{m}{n}\right)$, với $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Giải:

Ta có: $f(1.0) = f(1).f(0) - f(1+0) + 1 \Rightarrow f(0) = 2f(0) - 2 + 1$, (do $f(1) = 2$)

$$\Rightarrow f(0) = 2 - 1 = 1$$

Tìm $f(2) = ?$. Ta có:

$$f(1.1) = f(1).f(1) - f(1+1) + 1 \Rightarrow f(2) = f(1).f(1) - f(1) + 1 = 2.2 - 2 + 1 = 3$$

Tìm $f(3) = ?$. Ta có:

$$f(2.1) = f(2).f(1) - f(2+1) + 1 \Rightarrow f(3) = f(2).f(1) - f(2) + 1 = 3.2 - 3 + 1 = 4$$

Giả sử $f(m) = m + 1, m \in \mathbb{N}$. Ta chứng minh $f(m+1) = m + 2$.

Thật vậy:
$$\begin{aligned} f(m.1) &= f(m)f(1) - f(m+1) + 1 \Rightarrow f(m+1) = f(m).f(1) - f(m) + 1 \\ &= (m+1).2 - (m+1) + 1 = (m+1) + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } f(m) = m + 1, \forall m \in \mathbb{N}$$

Tính $f(-1) = ?$. ta có:

$$f[(-1).1] = f(1)f(-1) - f[1+(-1)] + 1 \Rightarrow f(-1) = 2f(-1) - 1 + 1 \Rightarrow f(-1) = 0 = -1 + 1$$

Tính $f(-2) = ?$ Ta có:

$$f[(-1)(-1)] = f(-1).f(-1) - f[-1+(-1)] + 1 \Rightarrow f(-2) = f(-1).f(-1) - f(1) + 1 = -2 + 1$$

Giả sử $f(-m) = -m+1, m \in \mathbb{N}$. Cần chứng minh $f(-m-1) = -m-1+1 = -m$

Thật vậy:

$$f[(-m).(-1)] = f(-m)f(-1) - f(-m-1)+1 \Rightarrow f(-m-1) = f(-m).f(-1) - f(m)+1 = -m-1+1 = -m$$

vậy ta có: $f(m) = m+1, \forall m \in \mathbb{Z}$ (1)

Với $x \in \mathbb{R}$ có: $f(x.1) = f(x)f(1) - f(x+1)+1 \Rightarrow f(x+1) = 2f(x) - f(x)+1 = f(x)+1$

$$f[(x+1).1] = f(x+1).f(1) - f(x+1+1)+1 \Rightarrow f(x+2) = 2f(x+1) - f(x+1)+1$$

$$\Rightarrow f(x+2) = f(x+1)+1 = f(x)+1+1 = f(x)+2$$

Giả sử $f(x+n) = f(x)+n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$. cần chứng minh $f(x+n+1) = f(x)+n+1$

Thật vậy: $f[(x+n).1] = f(x+n)f(1) - f(x+n+1)+1$
 $\Rightarrow f(x+n+1) = 2f(x+n) - f(x+n)+1 = f(x+n)+1 = f(x)+n+1$

Tính $f(x-1) = ?$ Ta có:

$$f[(x-1).1] = f(x-1).f(1) - f(x-1+1)+1 \Rightarrow f(x-1) = 2f(x-1) - f(x)+1$$
$$\Rightarrow f(x-1) = f(x)-1$$

Tính $f(x-2) = ?$

$$f[(x-2).1] = f(x-2)f(1) - f(x-2+1)+1 \Rightarrow f(x-2) = 2f(x-2) - f(x-1)+1$$
$$\Rightarrow f(x-2) = f(x-1)-1 = f(x)-1-1 = f(x)-2$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được:

$$f(x+n) = f(x)+n, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Ta có: $\forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ có $f\left(n.\frac{m}{n}\right) = f(n).f\left(\frac{m}{n}\right) - f\left(n+\frac{m}{n}\right)+1$

Ta có: $f(n) = n+1, f(m) = m+1$ (do (1))

$$f\left(\frac{m}{n}+n\right) = f\left(\frac{m}{n}\right)+n \quad (\text{do (2)})$$

Vậy:

$$\Rightarrow m = n. f\left(\frac{m}{n}\right) - n \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} + 1$$

Ví dụ 2 Cho hàm số f không đồng nhất không, xác định trên $\mathbb{R}$ bởi
 $\forall x, y \in \mathbb{R}, 2f(x).f(y) = f(x+y) + f(x-y)$

a. Chứng minh $f(x) \geq -1, \forall x$

b. Cho $f(3) = 0$. Tính $f(2010); f(2016); f(2019)$

Giải:

a. Chọn $y = 0 \Rightarrow 2f(x).f(0) = 2f(x) \Rightarrow 2f(x)[f(0) - 1] = 0$

Do $f(x) \not\equiv 0 \Rightarrow f(0) = 1$.

Thay x bởi $\frac{x}{2}$ và y bởi $\frac{x}{2}$, có: $2f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) + f(0) \Rightarrow 2\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 = f(x) + 1$

$$\Rightarrow f(x) + 1 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq -1$$

b. Ta có $f(x+y) = 2f(x)f(y) - f(x-y)$

Nên: $f(6) = f(3+3) = 2f(3).f(3) - f(3-3) = -1$

$$f(9) = f(6+3) = 2f(6).f(3) - f(6-3) = 0$$

$$f(12) = f(9+3) = 2f(9).f(3) - f(9-3) = -f(6) = 1$$

Quy nạp chứng minh : $f[3.(2k+1)] = 0; f[3.(4k)] = 1; f[3.(4k+2)] = -1$

Ta có: $2016 = 3.672; 672 = 4.168 \Rightarrow f(2016) = 1$

$$2019 = 3.673 \Rightarrow f(2019) = 0$$

$$2010 = 3.670; 670 = 4.167 + 2 \Rightarrow f(2010) = -1$$

Loại 2. PHƯƠNG PHÁP CHỌN GIÁ TRỊ ĐẶC BIỆT

Ví dụ 3 Cho hàm số $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x+y}, \quad x, y \in \mathbb{R}, x+y \neq 0. \text{ Có tồn tại } x \in \mathbb{R} \text{ để } f(x) \neq 0 \text{ không?}$$

GIẢI:

$$\text{Chọn } y=1 \Rightarrow f(x) = \frac{f(x) + f(1)}{x+1}, \quad x \neq -1 \Rightarrow xf(x) = f(1)$$

$$\text{Cho } x=0 \Rightarrow 0 \cdot f(0) = f(1) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$\text{Vậy } \forall x \neq -1, 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

$$\text{Tại } x=2, y=0 \Rightarrow f(2 \cdot 0) = \frac{f(2) + f(0)}{2+0} \Rightarrow 2f(0) = f(2) + f(0) \Rightarrow f(0) = f(2) = 0$$

Tại

$$x=-1, y=0 \Rightarrow f[(-1) \cdot 0] = \frac{f(-1) + f(0)}{-1+0} \Rightarrow -f(0) = f(-1) + f(0) \Rightarrow f(-1) = -2f(0) = 0$$

$$\text{Vậy } f(x) \equiv 0$$

Ví dụ 4 Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

GIẢI:

$$\text{Cho } x=y=1 \Rightarrow 2f(1) = 2[f(1)]^2 \Rightarrow f(1)[1-f(1)] = 0$$

$$\text{Trường hợp 1: } f(1) = 0. \text{ Cho } y=1 \Rightarrow xf(1) + f(x) = (x+1)f(x)f(1) \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\text{Trường hợp 2: } f(1) = 1$$

$$\text{cho } y=1 \Rightarrow xf(1) + f(x) = (x+1)f(x)f(1) \Rightarrow x + f(x) = (x+1)f(x)$$

$$\Rightarrow x = xf(x) \Rightarrow x[1-f(x)] = 0$$

Với $x \neq 0 \Rightarrow f(x) = 1$

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Loại 3. PHƯƠNG PHÁP HÀM LIÊN TỤC

Ví dụ 5 Tìm hàm số liên tục $f(x)$ thỏa mãn: $f(x^2) \cdot f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

GIẢI:

Từ $f(x^2) \cdot f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Cho } x = 0 \Rightarrow f(0) \cdot f(0) = 1 \Rightarrow f(0) = \pm 1$$

$$\text{Cho } x = 1 \Rightarrow f(1) \cdot f(1) = 1 \Rightarrow f(1) = \pm 1$$

Thay x bởi $-x$ ta có $f(x^2) \cdot f(-x) = 1$

$$\text{Vậy ta có } f(x^2) \cdot f(-x) = f(x^2) \cdot f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy ta chỉ cần xét với $x \geq 0$

Trước hết ta xét với $0 \leq x < 1$

$$\text{Từ } f(x^2) \cdot f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{f(x^2)}; f(x^4) \cdot f(x^2) = 1 \Rightarrow f(x^4) = \frac{1}{f(x^2)}$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{1}{f(x^2)} = f(x^4) \text{ . thay } x \text{ bởi } x^4, \text{ ta có } f(x^4) = f(x^{16})$$

$$\text{Cứ tiếp tục ta có: } f(x) = f(x^4) = f(x^{16}) = \dots = f(x^{4^{n-1}})$$

$$\text{Vậy } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{4^{n-1}}) = f(0) = \pm 1$$

Tương tự với $x \geq 1$

Ta có:
$$f(x) = \frac{1}{f\left(x^{\frac{1}{2}}\right)} = f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = f(1) = \pm 1$$

Ví dụ 6 Cho $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq \pm 1$. Tìm tất cả hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện $f(x^\alpha) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$

GIẢI:

Nếu $|\alpha| < 1 \Rightarrow f(x) = f(x^\alpha) = f((x^\alpha)^\alpha) = f(x^{\alpha^2}) = \dots = f(x^{\alpha^n})$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{\alpha^n}) = f(1), \forall x \in \mathbb{R}^+$

Nếu $|\alpha| > 1 \Rightarrow f(x) = f\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right) = f\left(\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = f\left(x^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}\right) = \dots = f\left(x^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}\right)$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(x^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}\right) = f(1), \forall x \in \mathbb{R}^+$

Vậy $f(x) = c \in \mathbb{R}$

Ví dụ 7 Tìm các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

GIẢI:

Ta có: $f(-x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = f(x)$ nên ta chỉ cần xét với $x \geq 0$. Lấy $x_0 \in \mathbb{R}$

Trường hợp 1: $0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}$ xét dãy: $(1): x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ với $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}$

Quy nạp, ta chứng minh $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}, \forall n, x_{n+1} - x_n = \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

Vậy dãy (1) đơn điệu tăng và bị chặn nên dãy hội tụ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Rightarrow A^2 - A + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Do $f(x)$ liên tục và $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

Ta có $f(x_{n+1}) = f\left(x_n^2 + \frac{1}{4}\right)$; mặt khác $f(x_n) = f\left(x_n^2 + \frac{1}{4}\right), \forall n$

Vậy $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = \dots = f\left(\frac{1}{2}\right), \forall x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

Trường hợp 2: $x_0 > \frac{1}{2}$. Xét dãy (2): $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ với $x_{n+1} = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}}$

Ta có: $x_{n+1}^2 - x_n^2 = -\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n$. Vậy dãy (2) đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi $\frac{1}{2}$. Do đó dãy (2) hội tụ.

$$\text{Gọi } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = B \Rightarrow B = \sqrt{B - \frac{1}{4}} \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

Do $f(x)$ liên tục nên $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

Ta có $f(x_{n+1}) = f\left(x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}\right) = f(x_n); (do x_n = x_{n+1}^2 + \frac{1}{4})$

Vậy $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = \dots = f\left(\frac{1}{2}\right), \forall x_0 > \frac{1}{2}$

Vậy $f(x) = C, \forall x \geq 0$

Kết luận $f(x) \equiv C, \forall x \in \mathbb{R}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thoả mãn điều kiện: $\forall u, v \in \mathbb{R} : f(u+v) = f(u) + f(v)$
 - a. Chứng minh $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}$ ta có: $f(rx) = r.f(x)$
 - b. Nếu $f(x)$ liên tục tại $x=0$, hãy xác định $f(x)$
2. Cho $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^+$, thoả mãn điều kiện: $\forall u, v \in \mathbb{R}^+ : f(u.v) = f(u) + f(v)$
 - a. Chứng minh $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall r \in \mathbb{Q}$ ta có: $f(x^r) = r.f(x)$
 - b. Nếu $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, hãy xác định $f(x)$
3. Chứng minh mọi hàm $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn một trong hai đẳng thức sau thì cũng thoả mãn đẳng thức còn lại:
$$f(x+y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R}$$
$$f(xy+x+y) = f(xy) + f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R}$$
4. Cho a là một số thực $0 < a < 1$ và hàm f liên tục trên $[0,1]$ có
$$f(0) = 0, f(1) = 1, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + ay, \forall x, y \in [0,1], x \leq y$$

Hãy xác định $f\left(\frac{1}{7}\right)$

KẾT LUẬN

Báo cáo đã trình bày một số kiến thức cơ bản về giải tích liên quan đến giới hạn hàm số, hàm số liên tục, đạo hàm của hàm một biến và một số phương pháp đặc biệt để giải phương trình hàm.

Những kết quả trong báo cáo có thể xem như những bài tập cho sinh viên nhằm nâng cao tư duy toán học và ôn thi Olympic Toán toàn quốc.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Nguyễn Xuân Liêm. *Giải tích –tập một* . NXB Giáo Dục, 1998.
- [2] Nguyễn Đình Trí . *Toán học Cao Cấp – tập hai Phép tính giải tích một biến số*. NXB Giáo Dục, 2006.
- [3] Bộ môn Toán Đại học Mở Địa Chất. *Hướng dẫn ôn tập giải tích I*. 2017